

# 山东省青岛第十九中学 2018 年自主招生考试

## 数学试题

(考试时间 60 分钟, 满分 120 分)



亲爱的同学, 欢迎报考青岛十九中, 祝你考试成功!

友情提示: 本试题分 I、II 两卷。其中第 I 卷为选择题, 请将所选答案用 2B 铅笔在答题纸上按题号顺序规范填涂; 第 II 卷为非选择题, 请将答案用黑色字迹的签字笔写在答题纸上各题目的答题区域内。

### 第 I 卷 选择题 (满分 36 分)

一、选择题 (本题满分 36 分, 共有 6 道小题, 每小题 6 分)

1. 计算  $\frac{2 \tan 45^\circ}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{(\cos 30^\circ - 1)^2} = (\quad)$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$       B.  $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$       C.  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$       D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. 青岛十九中举办“诗词大会”比赛, 10 名学生的得分情况如下表, 10 名学生所得分数的众数为 80, 平均数为 85, 则  $b-a$  的值为 ( )

- A. -5      B. -10      C. 5      D. 10

人数	4	3	2	1
分数	$b$	85	$a$	95

3. 下列说法正确的是 ( )

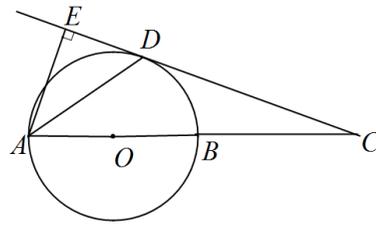
- A. 若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$       B. 若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$   
 C. 若  $a < 0$ ,  $-1 < b < 0$ , 则  $ab > ab^2$       D. 若  $a > b$ , 则  $a+c > b-c$

4. 定义运算  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ , 若函数  $y = \begin{vmatrix} (m-1)x & 2 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}$  的图象总是在  $x$  轴上方, 则  $m$  的取值范围 ( )

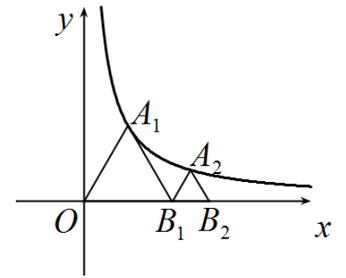
- A.  $1 < m < 9$       B.  $1 \leq m < 9$       C.  $m > 9$  或  $m \leq 1$       D.  $m < 9$

5. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  $C$  在  $AB$  的延长线上,  $AD$  平分  $\angle CAE$  交  $\odot O$  于点  $D$ , 且  $AE \perp CD$ , 垂足为点  $E$ , 若  $BC = 3$ ,  $CD = 3\sqrt{2}$ , 则  $\cos \angle ACE = (\quad)$

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$



第 5 题图



第 6 题图

6. 如图,  $\triangle OA_1B_1$ ,  $\triangle B_1A_2B_2$  为等边三角形,  $\triangle OA_1B_1$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 点  $A_1$ ,  $A_2$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上, 则  $B_2$  点的坐标为 ( )

- A.  $(2\sqrt{2}, 0)$       B.  $(\sqrt{2}+1, 0)$       C.  $(3, 0)$       D.  $(2\sqrt{3}, 0)$

### 第 II 卷 非选择题 (满分 84 分)

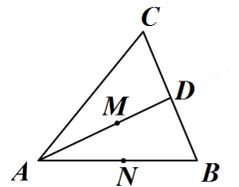
二、填空题 (本题满分 30 分, 共有 6 道小题, 每小题 5 分)

7. 已知  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ , 则  $\frac{2x-14xy-2y}{x-2xy-y} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

8. 一枚质地均匀的骰子, 六个面分别标有 1,2,3,4,5,6, 连续投掷两次, 两次朝上的面上的数字分别为  $a, b$ , 使得方程  $x^2 - ax + 2b = 0$  有两个不同实数根的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

9. 已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程  $2x^2 - 8x + a = 0$  的两个根, 且这个三角形的斜边长为 3, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

10. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $AB = 6$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BAC$  的角平分线交  $BC$  于  $D$ , 点  $M, N$  分别是  $AD$  与  $AB$  上的动点, 则  $BM + MN$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;



第 10 题

11. 记  $y = f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , 其中  $f(1)$  表示  $x=1$  时  $y$  的值, 即

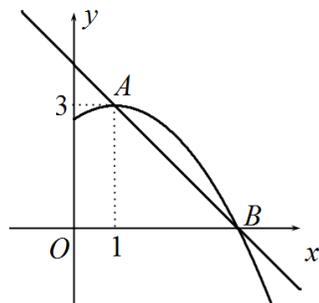
$$f(1) = \frac{1^2}{1+1^2} = \frac{1}{2}, \quad f(2) \text{ 表示 } x=2 \text{ 时 } y \text{ 的值, 即 } f(2) = \frac{2^2}{1+2^2} = \frac{4}{5},$$

则  $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + \dots + f(2018) + f(\frac{1}{2018}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

12. 如图, 抛物线  $C_1: y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图象的一部分, 顶点  $A(1, 3)$ , 抛物线与  $x$  轴的一个交点为  $B$ , 直线  $l: y_2 = mx + n (m \neq 0)$  经过  $A, B$  两点, 则下列结论正确的是 \_\_\_\_\_;

- ①  $a + b + c = m + n$ ;
- ② 方程  $ax^2 + bx + c - 2 = 0$  没有实数根;
- ③ 若  $m - n = -5$ , 当  $1 < x < 4$  时,  $y_1 > y_2$ ;
- ④ 若  $m - n = -5$ , 将抛物线  $C_1$  的图象向右平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位后得到新抛物线的函数表达式为:

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

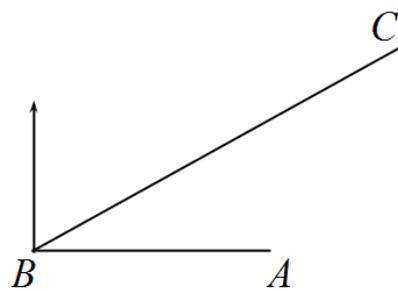


第 12 题图

三、解答题(本题满分 54 分, 共有 4 道小题)

13. (本小题满分 12 分)

为保障自主招生的公平性, 考试时每个考点都要安装手机信号屏蔽仪, 要求在考点  $A$  周围  $1 \text{ km}$  内不能收到手机信号, 检查员抽查青岛市一考点, 在考点  $A$  的正西方向约  $\sqrt{3} \text{ km}$  有一条北偏东  $60^\circ$  方向的公路, 检查员在  $B$  处用手机接电话, 以  $12 \text{ km/h}$  的速度沿公路行驶, 检查员的手机需要多长时间就开始收不到信号, 手机收不到信号需要持续多长时间该考点才算合格?

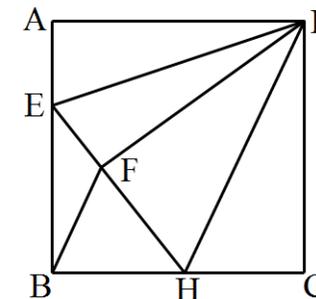


第 13 题图

14. (本小题满分 13 分)

已知正方形  $ABCD$  中,  $AB = 6$ , 点  $E$  在  $AB$  上, 且  $BE = 2AE$ , 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  对折至  $\triangle DEF$ , 延长  $EF$  交  $BC$  于  $H$ , 连接  $DH, BF$ .

- (1) 求证:  $CH = FH$ ;
- (2) 求  $BH$  的长;
- (3) 求  $\triangle FBH$  的面积.



第 14 题图

2018 年自主招生考试数学试题

15. (本小题满分 14 分)

阅读材料, 完成题目:

求  $2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n$

解: 设  $S = 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n$  ①

将等式两边同乘以 2 得:

$2S = 2^2+2^3+2^4+\dots+2^{n+1}$  ②

①-②得:

$S-2S = 2-2^{n+1}$ , 即  $S = 2^{n+1}-2$

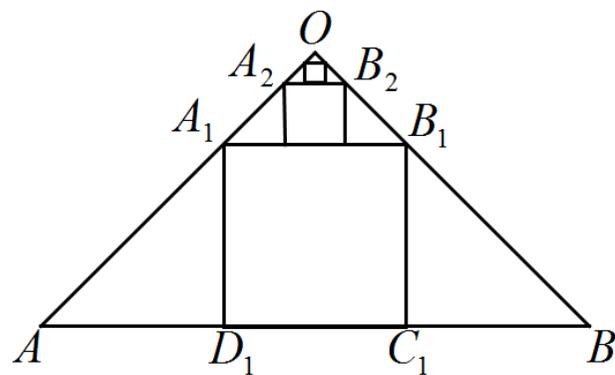
即  $2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n = 2^{n+1}-2$

在斜边长为 1 的等腰直角  $\triangle OAB$  中, 作内接正方形  $A_1B_1C_1D_1$ , 在等腰直角  $\triangle OA_1B_1$  中, 作内接正方形  $A_2B_2C_2D_2$ , 在等腰直角  $\triangle OA_2B_2$  中作内接正方形  $A_3B_3C_3D_3$ , 依次作下去. 记第一个正方形  $A_1B_1C_1D_1$  的边长为  $a_1$ , 第二个正方形  $A_2B_2C_2D_2$  的边长为  $a_2$ , ..., 第  $n$  个正方形  $A_nB_nC_nD_n$  的边长为  $a_n$ .

(1) 求  $a_1, a_2$ ; (请写出计算过程)

(2) 写出  $a_n$  的表达式; (直接写结论)

(3) 设  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ , 求  $S$ .



第 15 题图

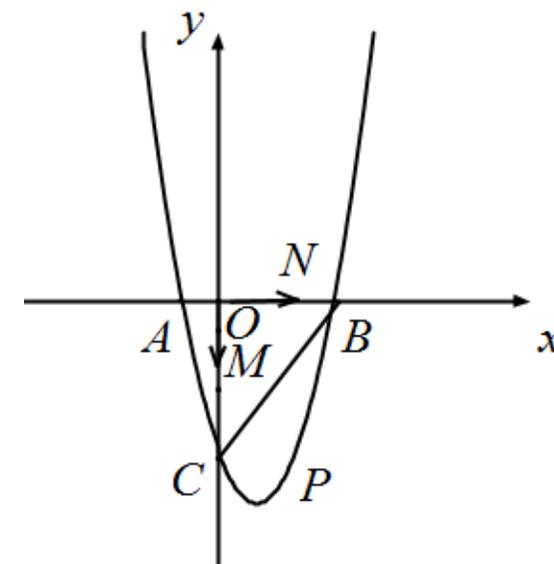
16. (本小题满分 15 分)

在平面直角坐标系中, 顶点为  $(2, -\frac{32}{3})$  的抛物线交  $x$  轴于  $A, B$  两点 ( $A$  点在  $B$  点左侧), 交  $y$  轴于点  $C$ , 已知  $A$  点坐标为  $(-2, 0)$ .

(1) 求此抛物线的函数表达式;

(2) 动点  $M, N$  同时从  $O$  点出发, 同时到达  $C$  点运动停止. 点  $M$  沿线段  $OC$  运动, 速度为每秒 1 个单位长度, 点  $N$  沿线段  $OB \rightarrow$  线段  $BC$  运动. 设点  $M$  的运动时间为  $t$  秒,  $\triangle OMN$  的面积为  $S$ , 求出  $S$  与  $t$  之间的函数表达式;

(3) 在抛物线位于第四象限的部分图象上, 是否存在一点  $P$ , 使  $\triangle BCP$  的面积最大? 若存在, 求出  $\triangle BCP$  面积的最大值及此时  $P$  点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



第 16 题图