

二〇一六年青岛三十九中（海大附中）海洋班自主招生测试

数学试题

（时间：60分钟 满分：100分）

1. 如果考生的解法与本解法不同，可参照本评分标准制定相应评分细则。
2. 当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分时，如果这一步以后的解答未改变这道题的内容和难度，可视影响程度决定后面部分的给分，但不得超过后面部分应给分数的一半；如果这一步以后的解答有较严重的错误，就不给分。
3. 为阅卷方便，本解答中的推算步骤写得较为详细，但允许考生在解答过程中，合理省略非关键性的推算步骤。
4. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：（本题满分 18 分，共有 6 道小题，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	D	A	C	B	C

二、填空题：（本题满分 24 分，共有 6 道小题，每小题 4 分）

7.  $6.32 \times 10^{-5}$     8. 87    9.  $\frac{\sqrt{3}}{7}$     10.  $a \leq 2$     11.  $2\sqrt{2}$     12. (1, -2016)

三、解答下列各题（本题共有 5 道小题，满分 58 分）

13.（本题满分 10 分，共有 2 道小题，每小题 5 分）

(1) 解：
$$\frac{m^2 - 3m}{m^2 + 4m + 4} \div \frac{m - 3}{m + 2} - \frac{2}{m + 2}$$

$$= \frac{m(m - 3)}{(m + 2)^2} \cdot \frac{m + 2}{m - 3} - \frac{2}{m + 2}$$

$$= \frac{m}{m + 2} - \frac{2}{m + 2}$$

$$= \frac{m - 2}{m + 2}$$
.....1 分  
.....2 分  
.....3 分

当  $m = \sqrt{2} - 2$  时，原式 =  $\frac{\sqrt{2} - 2 - 2}{\sqrt{2} - 2 + 2} = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}$ . .....5 分

(2) 解：由图象 P 点的横坐标为 -1，代入  $y = -2x$  得  $y = 2$ ，.....6 分  
 所以点 P(-1, 2)， $y = kx + b$  的图象还经过点 (1, 0) 代入可得方程组  

$$\begin{cases} -k + b = 2 \\ k + b = 0 \end{cases}$$
 .....7 分

解得:  $\begin{cases} k = -1 \\ b = 1 \end{cases}$  .....9分

所以一次函数的关系式为  $y = -x + 1$ . .....10分

14. (本题满分 10 分)

解: (1) 设甲工厂每天加工  $x$  件, 则乙工厂每天加工  $1.5x$  件

由题意得:  $\frac{720}{x} - \frac{720}{1.5x} = 20 - 20$  .....3分

解之得:  $x = 12$  .....5分

经检验,  $x = 12$  为所列方程的根.

答: 甲工厂每天加工 12 件, 乙工厂每天加工 18 件. ....6分

(2) 由 (1) 可知加工 720 件产品, 甲工厂要 60 天, 乙工厂要 40 天. 所以甲工厂的  
加工总费用为  $60(600 + 80) = 40800$ (元). ....7分

设乙工厂报价为每天  $x$  元, 则乙工厂的加工总费用为  $40(x + 80)$ 元 .

由题意得:  $40(x + 80) \leq 40800$ , 解之得  $x \leq 940$

答: 乙工厂所报加工费每天最多为 940 元时, 可满足公司要求, 有望加工这批产品.  
.....10分

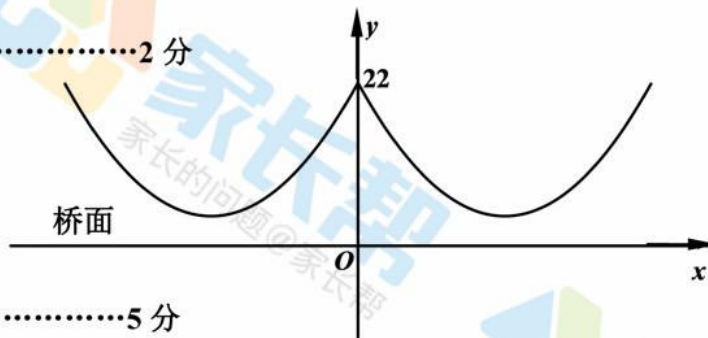
15. (本题满分 10 分)

解: (1) 由图象知, 点  $(0, 22)$ ,  $(15, \frac{41}{8})$  在抛物线  $y = \frac{9}{200}x^2 + bx + c$  上

则  $\begin{cases} c = 22 \\ \frac{41}{8} = \frac{9}{200} \times 225 + 15b + c \end{cases}$  .....2分

解得  $\begin{cases} b = -\frac{9}{5} \\ c = 22 \end{cases}$

所以  $y = \frac{9}{200}x^2 - \frac{9}{5}x + 22$  .....5分



(2)  $y = \frac{9}{200}(x^2 - 40x) + 22$   
 $= \frac{9}{200}[(x - 20)^2 - 400] + 22$   
 $= \frac{9}{200}(x - 20)^2 + 4$  .....8分

所以当  $x = 20$  时,  $y = 4$

则抛物线最低点到桥面的距离为 4 米, 两抛物线最低点之间的距离为 40 米  
 .....10分

16. (本题满分 12 分)

证明: (1)  $\because O$  是  $AC$  中点

$\therefore OA=OC$  .....1 分

$\because$  矩形  $ABCD$

$\therefore AD \parallel BC$  .....2 分

$\therefore \angle DAC = \angle ACB, \angle AFE = \angle CEF$

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE$

$\therefore AF=CE$  .....4 分

又  $\because AF \parallel CE$

$\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形

$\therefore AE=CF$  .....6 分

(2) 当  $AB:BC=1:\sqrt{3}$  时, 是菱形, .....7 分

理由:  $\because$  矩形  $ABCD$

$\therefore \angle ABC=90^\circ,$

$\therefore AB:BC=1:\sqrt{3}$

$\therefore AC=2AB$  .....8 分

$\because O$  是  $AC$  中点

$\therefore AC=2OA$

$\therefore AB=AO$

$\because BG=AB$

$\therefore AG=2AB$

$\therefore AC=AG$  .....10 分

$\therefore \angle GAO = \angle CAB$

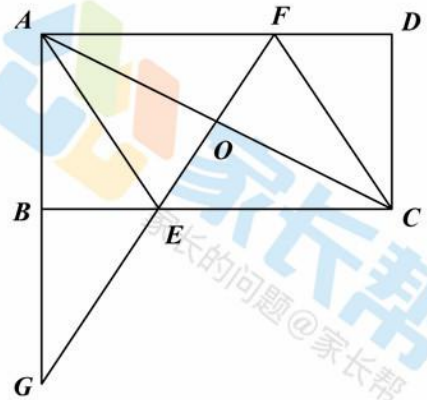
$\therefore \triangle AGO \cong \triangle ACB$

$\therefore \angle AOG = \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore EF \perp AC$

又  $\because AECF$  是平行四边形

$\therefore$  四边形  $AECF$  是菱形 .....12 分



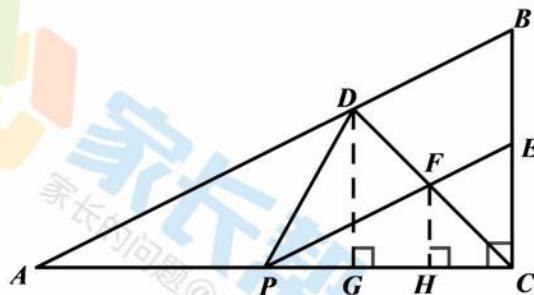
17. (本题满分 16 分)

解: (1) 四边形  $DPEB$  是平行四边形

$\therefore DP \parallel BE$

$\therefore \angle DPA = \angle BCA = 90^\circ$

$\because CD$  平分  $\angle BCA$



$\therefore \angle DCP = 45^\circ$

$\therefore DP = PC$

$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{DP}{AP}$ , 即  $\frac{6}{12} = \frac{12-t}{t}$

解得:  $t = 8$

答: 当  $t = 8$  时, 四边形  $DPEB$  是平行四边形. ....4 分

(2) 过点  $D$  作  $DG \perp AC$ , 垂足为  $G$ , 过点  $F$  作  $FH \perp AC$ , 垂足为  $H$ ,

$\therefore CD$  平分  $\angle BCA$

$\therefore \angle DCA = 45^\circ$

$\therefore DG = CG, FH = CH$

$\therefore \tan A = \frac{DG}{GA} = \frac{BC}{AC}$  即  $\frac{DG}{12-DG} = \frac{6}{12}$ , 解得:  $DG = 4$   $\therefore PE \parallel AB$

$\therefore \angle FPH = \angle A$

$\therefore \tan \angle FPH = \frac{FH}{PH} = \frac{BC}{AC}$  即  $\frac{FH}{12-t-FH} = \frac{6}{12}$ , 解得:  $FH = \frac{1}{3}(12-t)$

$\therefore$

$S_{\triangle DPF} = S_{\triangle DPC} - S_{\triangle PFC} = \frac{1}{2} PC \cdot DG - \frac{1}{2} PC \cdot FH = \frac{1}{2}(12-t) \times 4 - \frac{1}{2}(12-t) \times \frac{1}{3}(12-t)$

化简得:  $S_{\triangle DPF} = -\frac{1}{6}t^2 + 2t$  .....8 分

(3)  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36$ ,

由题意:  $S_{\triangle DPF} = \frac{4}{27} S_{\triangle ABC}$ , 即  $-\frac{1}{6}t^2 + 2t = \frac{4}{27} \times 36$ , 解得:  $t_1 = 4, t_2 = 8$ .

当  $t$  为 4 或 8 秒时,  $\triangle PDF$  与  $Rt\triangle ABC$  的面积之比等于 4:27. ....12 分

(4)  $\therefore$  点  $P$  在  $DF$  的垂直平分线上

$\therefore DP = FP$

在  $Rt\triangle DGP$  中,  $DP^2 = DG^2 + PG^2 = 4^2 + (8-t)^2$

在  $Rt\triangle FPH$  中,  $FP^2 = FH^2 + PH^2 = [\frac{1}{3}(12-t)]^2 + [\frac{2}{3}(12-t)]^2$

$\therefore DP = FP$

$\therefore DP^2 = FP^2$

即  $4^2 + (8-t)^2 = [\frac{1}{3}(12-t)]^2 + [\frac{2}{3}(12-t)]^2$

解得:  $t_1 = 6, t_2 = 0$  (舍去)

答: 当  $t = 6$  时点  $P$  在  $DF$  的垂直平分线上. ....16 分