

# 青岛二中 2017 年自主招生（数学）试题

初中学校\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 考号\_\_\_\_\_



科学里有许多绝妙而稀奇的思想，却总被关在狭小的盒子里，那不是太可惜了吗？今天，让我们把那盒子打开，让思想飘散……

1. 若某个函数的图象与函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象关于直线  $x = 2$  对称，则该函数的表达式为\_\_\_\_\_。

2. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} x + 18 \leq a \\ x + 9 \geq 2008 \end{cases}$  有有限个整数解，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

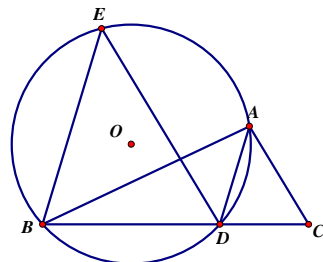
3. 若非负整数  $a, b$  满足方程  $|a - b| + ab = 1$ ，求  $a, b$  的值。

4. 如图，已知  $AD$  是  $\triangle ABC$  内角  $\angle BAC$  的平分线， $\odot O$  经过  $A, B, D$  三点，过点  $D$  作  $DE \parallel AC$ ，交  $\odot O$  于点  $E$ ，连接  $EB$ 。

(1) 求证：  $EB \parallel AD$ ；

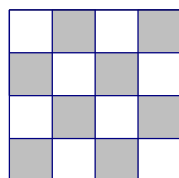
(2) 若  $BD = 2CD$ ，设  $\triangle EBD$  面积为  $S_1$ ， $\triangle ADC$  面积为  $S_2$ ，

且  $S_1^2 - 16S_2 + 4 = 0$ ，求  $\triangle ABC$  面积。



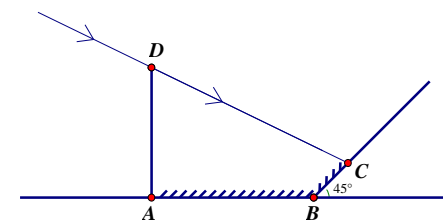
元，始也。  
三元，意为多种起始。

5. 小明和小亮来到青岛二中参观，见三元广场上铺满了大小相同深浅两色正方形地砖（如图）。他俩设计了一个游戏：让小明随机向地砖上抛掷一颗小石子，连续抛掷四次，若小石子有三次落在颜色相同的地砖上，则小明赢得游戏，那么小明赢得游戏的概率为\_\_\_\_\_。



6. 若三元广场上的正方形地砖边长为  $1\text{m}$ ，将一块地砖绕其对角线交点旋转  $45^\circ$ ，则旋转后地砖与旋转前地砖重叠部分的面积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ 。

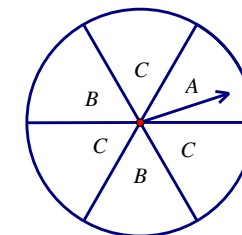
7. 若小亮需要测量三元广场旗杆  $AD$  高度，此时，旗杆的影子投射在平地 and 坡角为  $45^\circ$  的坡面上（如图），已知  $AB = 10\text{m}$ ， $BC = \frac{25\sqrt{2}}{12}\text{m}$ 。若小亮身高  $1.8\text{m}$ ，此时他的影子在平面上的长度为  $3\text{m}$ 。求旗杆的高度。



宇宙之大，粒子之微，火箭之速，  
化工之巧，地球之变，生物之谜，  
日用之繁，数学无处不在……

8. 某商场搞促销活动，设置了两个抽奖游戏，顾客可从两个游戏中任选一个参与，一等奖返现  $100$  元，二等奖返现  $80$  元，三等奖返现  $50$  元。

游戏一：一个转盘被分割成面积相等的六个扇形，指针转到  $A$  区域获一等奖，转到  $B$  区域获二等奖，转到  $C$  区域获三等奖；



游戏二：一个盒子中装有两个红球、两个蓝球和一个白球，这些球除颜色外都相同，从中随机摸出两个球，两个球都为红色获一等奖，恰有一个白球获二等奖，其余情况获三等奖。

你认为选择哪一个游戏对顾客更有利？并说明你的理由。

9. (1) 某天，小明观察到父亲开动汽车时，踩下油门约  $\frac{1}{5}$ ，2 秒末汽车里程表显示前进了  $3.2\text{m}$ ，速度表显示速度为  $12\text{km/h}$ ；5 秒末，汽车前进了  $20\text{m}$ ，速度为  $30\text{ km/h}$ ；10 秒末，汽车前进了  $80\text{m}$ ，速度为  $60\text{ km/h}$ ；12 秒末，汽车前进了  $115.2\text{m}$ ，速度为  $72\text{ km/h}$ 。若汽车速度（单位： $\text{km/h}$ ）与时间（单位：秒）满足一次函数关系，汽车前进距离（单位： $\text{m}$ ）与时间（单位：秒）满足二次函数关系，请求出这两个函数表达式；

(2) 汽车正以 48 km/h 的速度行驶在笔直公路上(限速 120 km/h), 在超越前面一辆货车时, 小明父亲均匀加大油门, 此时小明测得, 1 秒末汽车速度为 50 km/h, 2 秒末汽车速度为 56 km/h, 3 秒末汽车速度为 66 km/h, 4 秒末汽车速度为 80 km/h, 请运用生活常识及初中所学函数知识预测小明父亲几秒后会超速? 若超速 10% 及以上, 驾驶员会被拍照处罚, 则几秒后小明父亲会被拍照处罚(结果可保留根式形式)?

10. 阅读预备知识, 完成题目

预备知识:

知识 1: 当  $a > 0, b > 0$  时, 不等式  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  成立, 当且仅当  $a = b$  时等号成立. 由此不等式可以看出, 当两正数  $a, b$  的乘积为定值  $s$  时, 两数之和有最小值  $2\sqrt{s}$ , 即  $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{s}$ ;

知识 2: 一次函数的图象是一条直线, 现将函数  $y = 3x + 2$  变形为  $3x - y + 2 = 0$ , 利用点到直

线距离公式(注: 平面内点  $P(m, n)$  到直线  $Ax + By + C = 0$  的距离为  $d = \frac{|Am + Bn + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ )

可得到  $A(1, 2)$  到此直线的距离为  $d = \frac{|3 \times 1 - 1 \times 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

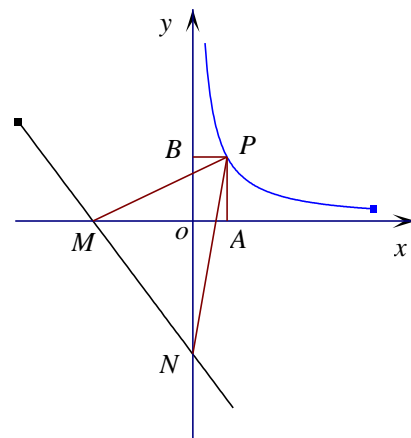
如图, 已知点  $P$  是反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k > 0)$  在第一象限图象上的一点, 过点  $P$  分别向  $x, y$  轴作垂线, 垂足为  $A, B$ .

(1) 求矩形  $OAPB$  的面积(结果用含  $k$  的表达式表示);

(2) 若矩形  $OAPB$  周长的最小值为  $4\sqrt{2}$ , 求  $k$  的值;

(3) 当  $k = 1$  时, 若一次函数  $y = -\frac{4}{3}x - 4$  的图象与  $x,$

$y$  轴分别交于  $M, N$  两点, 求  $\triangle PMN$  的面积  $S_{\triangle PMN}$  的最小值.



11. 若二次函数  $y = ax^2 + bx - 2$  的图象与  $x$  轴交于两个不同的点  $A(-1, 0), B(m, 0)$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ , 且以  $AB$  为直径的圆过点  $C$ .

(1) 求  $m$  的值和二次函数的表达式;

(2) 已知点  $D(1, n)$  在二次函数图象上, 一次函数  $y = x + 1$  的图象过点  $A$  且与二次函数的图象交于另一点  $E$ . 若点  $P$  在  $x$  轴上, 以点  $P, B, D$  为顶点的三角形与  $\triangle AEB$  相似, 求点  $P$  的坐标.

